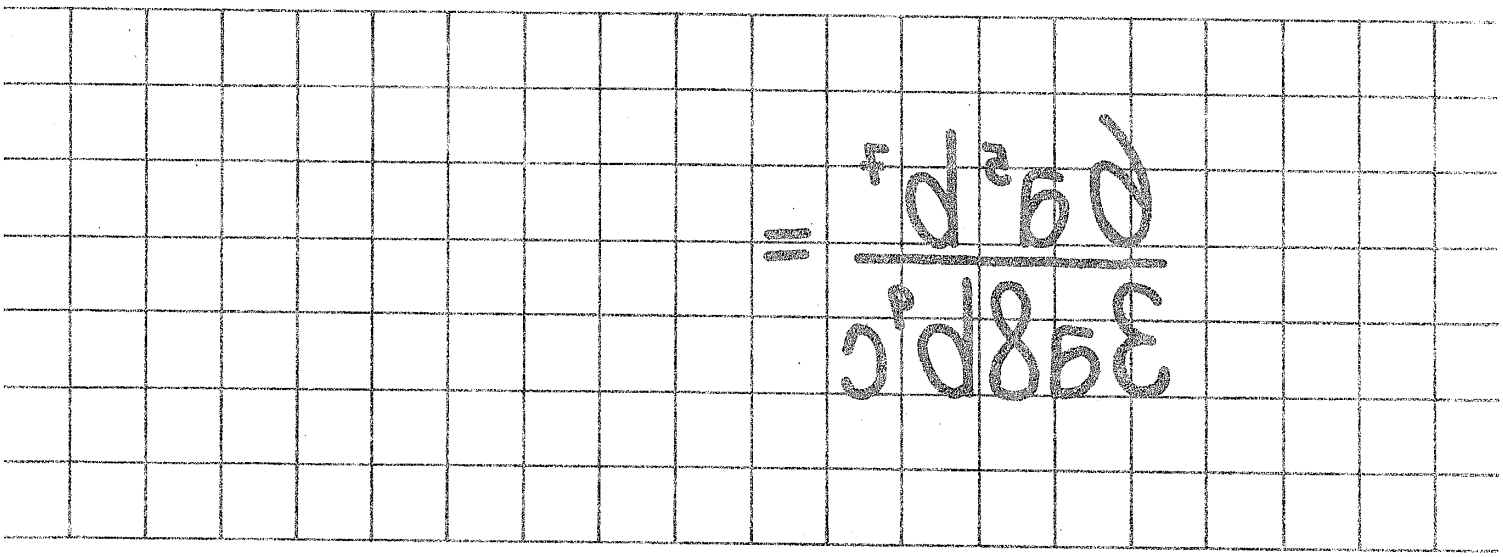
OPERACIONES CON EXPRESIONES RACIONALES



Obras que integran el bloque 1 *(Álgebra. Estructuras y operaciones)*

1. Conjuntos
2. Estructuras matemáticas
3. El conjunto de los enteros
4. Operaciones con enteros
5. Lenguaje algebraico 1. Formación
6. Lenguaje algebraico 2. Transformación
7. Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división
8. Operaciones con polinomios 2. Productos notables
9. Operaciones con polinomios 3. Factorización
10. El conjunto de los racionales
11. ***Operaciones con expresiones racionales***
12. El conjunto de los reales
13. Operaciones con expresiones reales
14. El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior

$$\frac{6a^5b^7}{3a8b^9c} =$$

Módulos de matemáticas

Bloque 1

Álgebra. Estructuras y operaciones

Módulo 11

OPERACIONES CON EXPRESIONES RACIONALES

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
OPERACIONES CON EXPRESIONES RACIONALES
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
©1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1985
ISBN 968-24-1511-X

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

11.1 La expresión algebraica racional 9

11.2 Simplificación de expresiones racionales 20

11.3 Expresiones racionales equivalentes 32

11.4 Suma y resta de expresiones racionales comunes 38

11.5 Expresiones racionales mixtas 68

11.6 Multiplicación de expresiones racionales 75

11.7 División de expresiones racionales comunes 84

11.8 División de expresiones racionales mixtas 97

11.9 Operaciones con polinomios en $\mathbb{Q}$ 103

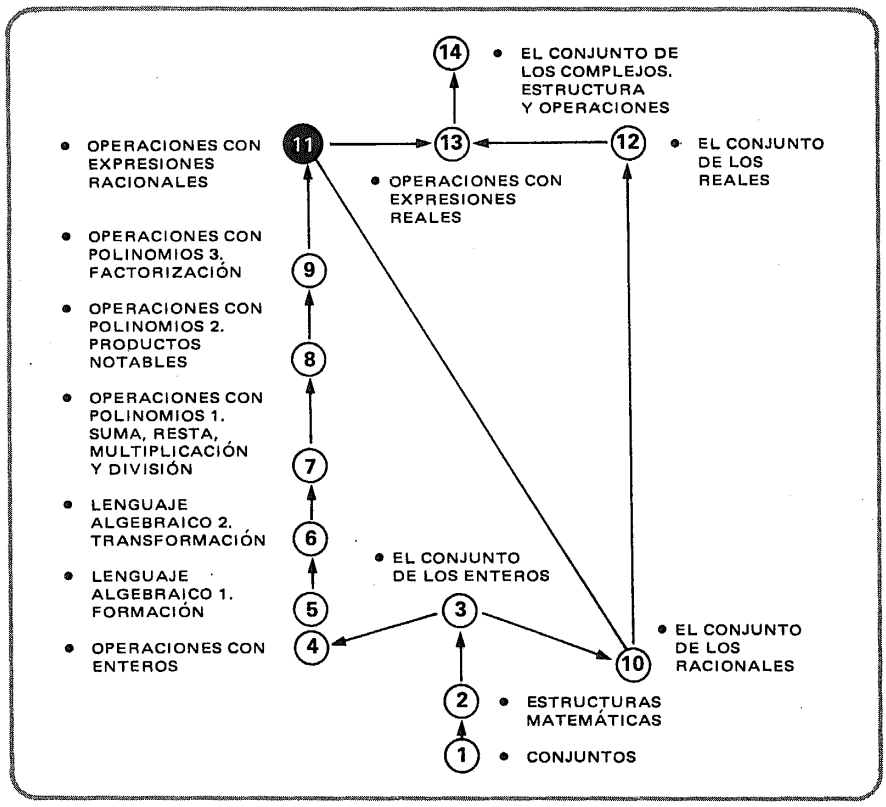
11.10 Restricciones para una expresión racional 112

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 1. Álgebra. Estructuras y operaciones

Objetivos: establecer las estructuras matemáticas relacionadas con los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Efectuar las cuatro operaciones binarias fundamentales y las operaciones monarias de potenciación y radicación con expresiones algebraicas pertenecientes a cada uno de los cinco conjuntos mencionados

Esquema estructural del bloque 1



Módulo 11. Operaciones con expresiones racionales

Objetivos: efectuar operaciones de simplificación, suma, resta, multiplicación o división de expresiones racionales

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Suma, resta, multiplicación y división de polinomios con coeficientes enteros	1	7
• Productos notables	1	8
• Factorización entera	1	9
• Concepto de número racional	1	10

11.1

La expresión algebraica racional

1

Recordemos que una expresión algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y exponentes en $\mathbb{N}$

se llama

_____

- **polinomio** con coeficientes **enteros** o **polinomio** en $\mathbb{Z}$,

con una indeterminada

2

De manera similar, a una expresión como

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

con coeficientes en $\mathbb{Q}$ y exponentes en $\mathbb{N}$

le llamaríamos

_____

- **polinomio** con coeficientes **racionales** o **polinomio** en $\mathbb{Q}$,

con una indeterminada

3

Sea $P_{\mathbb{Z}}$ el conjunto de los polinomios en $\mathbb{Z}$
y $P_{\mathbb{Q}}$ el conjunto de los polinomios en $\mathbb{Q}$:

$$P_{\mathbb{Z}} \subset P_{\mathbb{Q}}$$

V/F

V

4

Si dividimos un **polinomio en** $\mathbb{Q}$
entre otro **polinomio en** $\mathbb{Q}$
resulta una expresión de la forma

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \ldots + b_0}$$

que llamaremos **expresión racional,**
siempre que el divisor sea diferente de cero.

5

Expresión racional

$$\frac{P_1(x, y, \mathbb{Z} \ldots)}{P_2(x, y, \mathbb{Z} \ldots)}$$

$P_1(x, y, z \ldots), P_2(x, y, \mathbb{Z} \ldots) \in P_{\mathbb{Q}}$

$P_2(x, y, \mathbb{Z} \ldots) \neq 0$

6

Tenemos dos polinomios:

$3x^2 - 7x + 4$ $\qquad\qquad$ $x - 2$

Su cociente entero (efectuando la división) es:

$$\frac{3x^2 - 7x + 4}{x - 2} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 1 \\ \hline x - 2 & 3x^2 - 7x + 4 \\ & -3x^2 + 6x \\ \hline & \quad -x + 4 \\ & \quad\ x - 2 \\ \hline \text{residuo} \rightarrow & \quad\ 2 \end{array}$$

$3x - 1$

7

Podemos expresar el resultado así:

$$3x - 1 + \frac{2}{x - 2}$$

Este es un ejemplo de lo que denominaremos

expresión racional mixta.

8

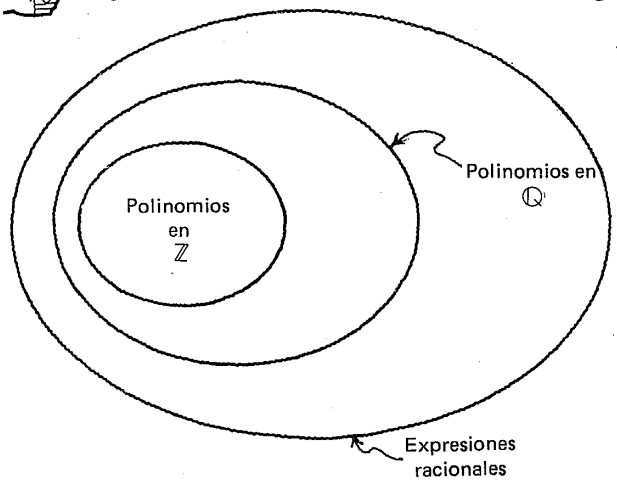
Convencionalmente aceptaremos que en:

$$\underline{\frac{3x^2 - 7x + 4}{x - 2}} = 3x - 1 + \underline{\frac{2}{x - 2}}$$

ésta es una **expresión racional común**

y ésta, una **expresión racional mixta**

9 Estudiemos con mucha atención este diagrama.

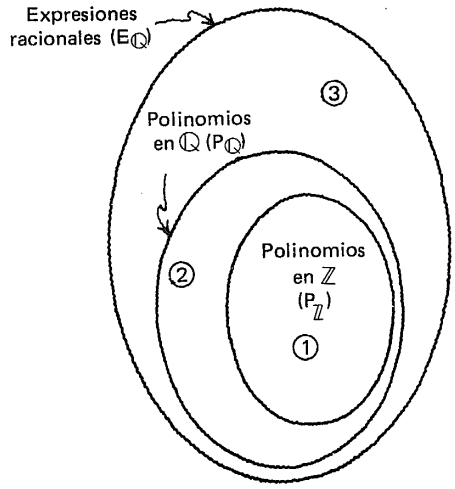


10 Ubiquemos las expresiones algebraicas, dadas en los siguientes cuadros, en este diagrama en que:

① representa el conjunto de los polinomios en $\mathbb{Z}$;

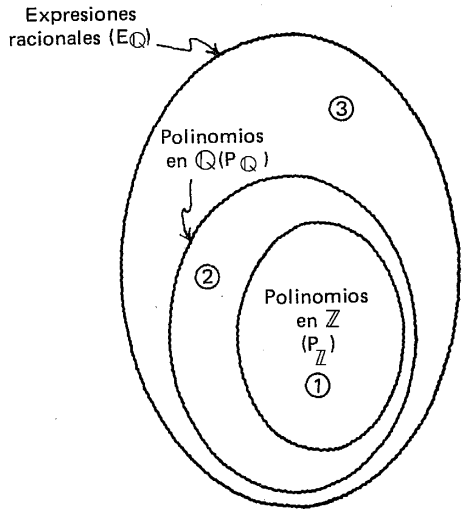
② representa el conjunto de los polinomios en $\mathbb{Q}$ que no son polinomios en $\mathbb{Z}$;

③ representa el conjunto de las expresiones racionales que no son polinomios en $\mathbb{Q}$.



11

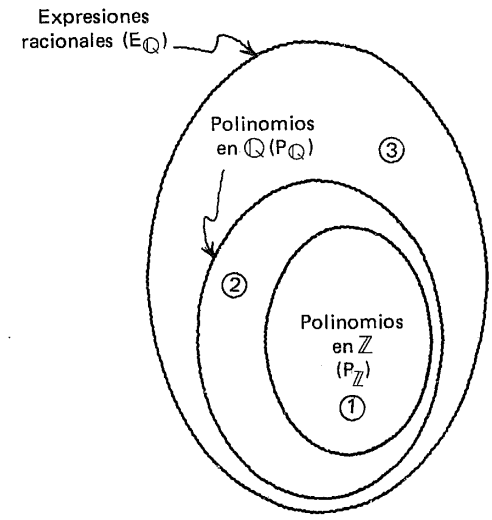
$x^3 + \frac{3}{4}x - 8$



②

12

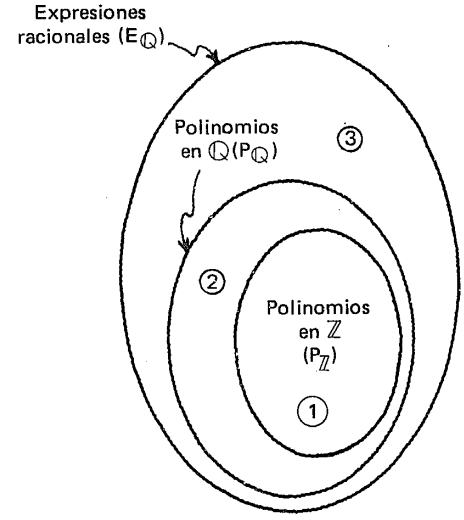
$$\frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1}$$



③

13

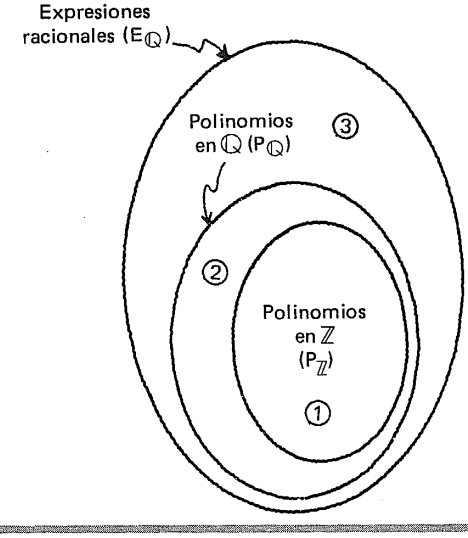
$$x^3 + 3x^2 + 5x - 8$$



①

14

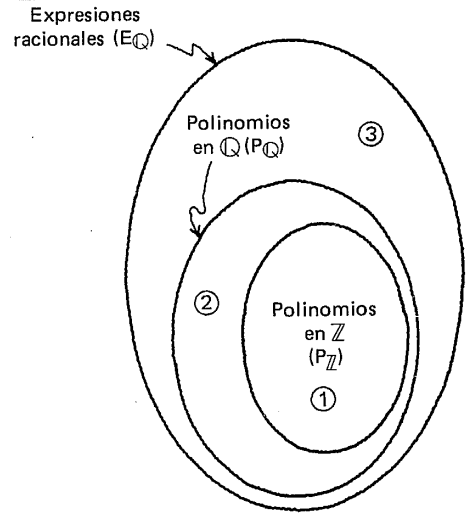
$$\frac{x^2 + 3}{4x}$$



③

15

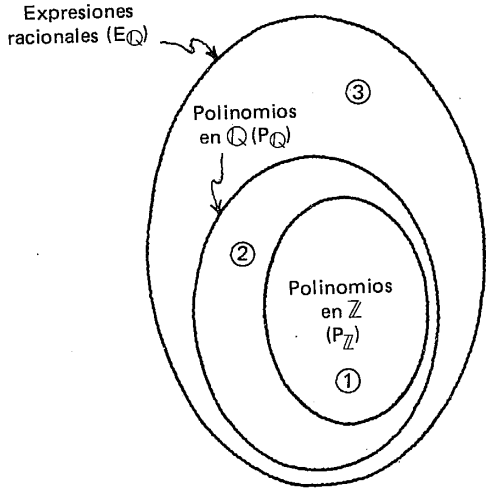
$\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$



②

16

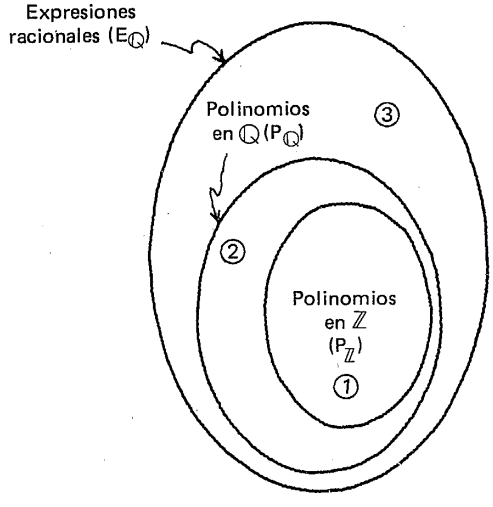
$3x^2 + 2x - \frac{1}{x+3}$



③

17

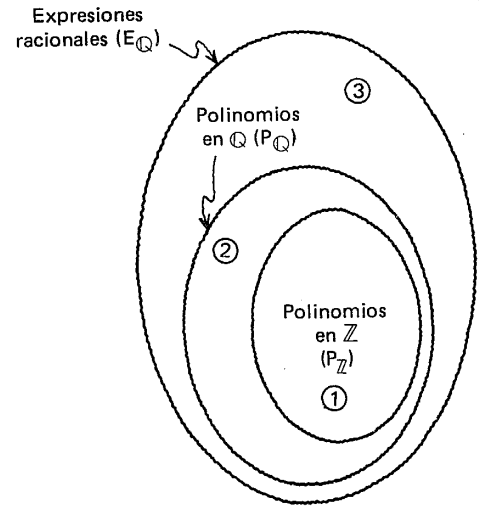
$\frac{3}{4}$



②

18

1



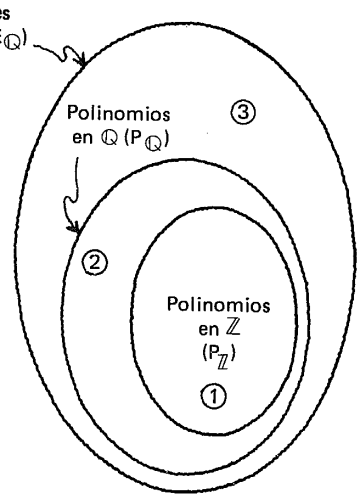
①

19

$3\frac{3}{4}$

que debemos interpretar como

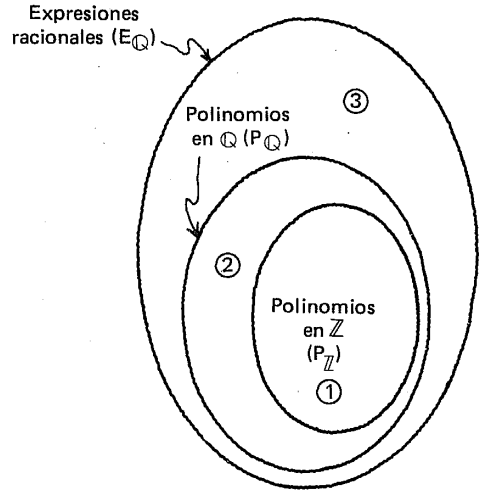
$(3 + \frac{3}{4})$



②

20

0



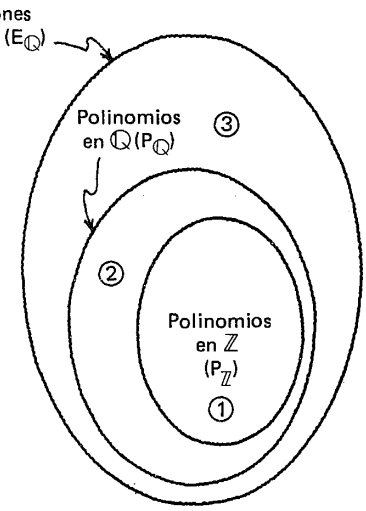
①

21

$E_{\mathbb{Q}} = \{x/x$ es una expresión racional$\}$

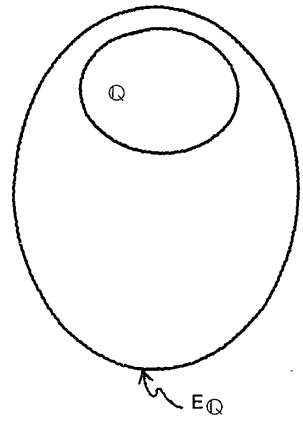
$\mathbb{Q} \subset E_{\mathbb{Q}}$

V/F



● V

Gráficamente

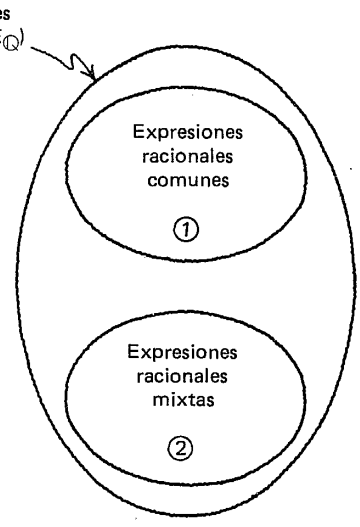


22

Ubiquemos las expresiones racionales, dadas en los siguientes cuadros, en este diagrama en que:

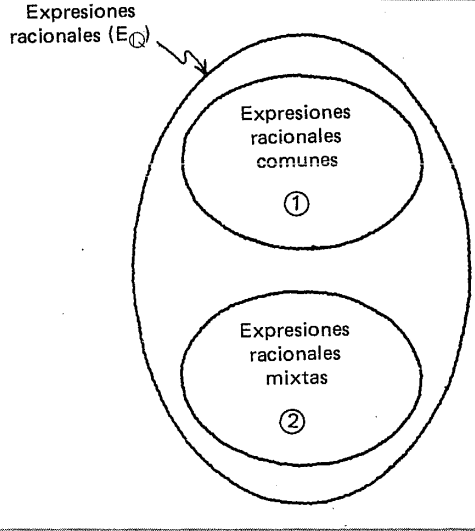
① representa las expresiones racionales comunes;

② representa las expresiones racionales mixtas.



23

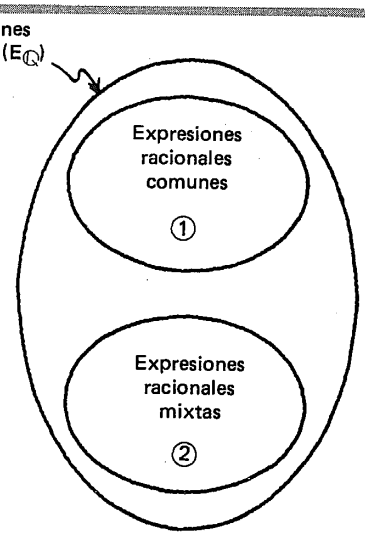
$$\frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$$



①

24

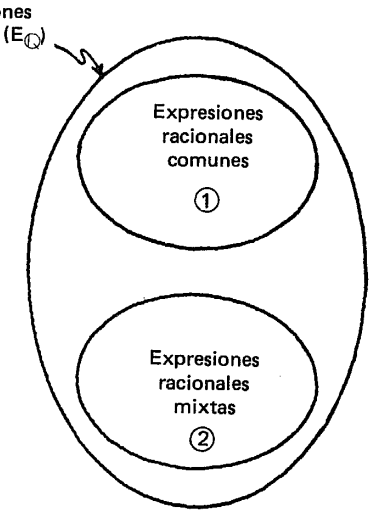
$$x^3 + 3x + \frac{x}{x^2 + 3}$$



②

25

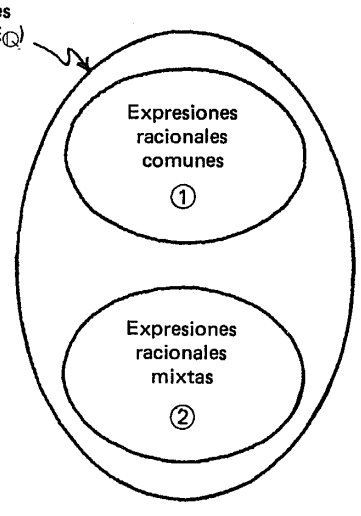
$$x + \frac{587}{784}$$



②

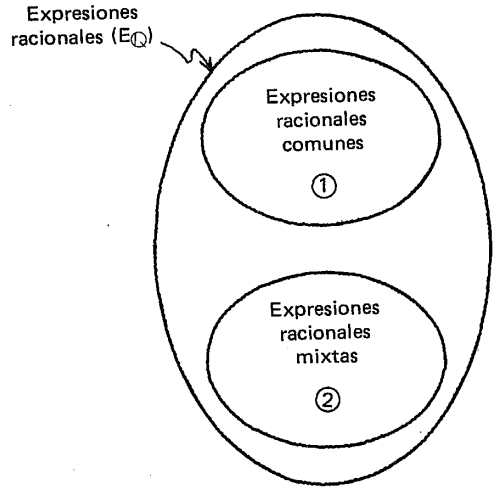
26

$$\frac{27}{32}$$



①

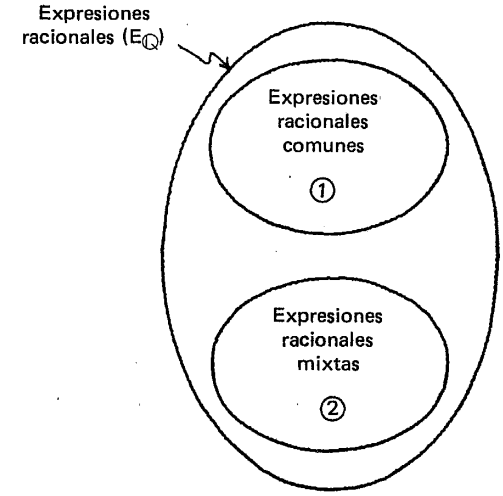
27



$\frac{x}{4}$

①

28



$1 + \frac{x}{2}$

②

1.11.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.11.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar,* en un conjunto dado de expresiones algebraicas, las que sean polinomios en $\mathbb{Z}$, polinomios en $\mathbb{Q}$ o expresiones racionales;

- *identificar* , en un conjunto dado de expresiones racionales, las que sean comunes y las que sean mixtas.

11.2

Simplificación de expresiones racionales

29

Observar con atención:

$$\frac{4a^2b^5}{6a^3b^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b}{3 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{2b^2}{3a}$$

$$(1)\ (1)\ (1)\quad (1)\ (1)\ (1)$$

30

Con base en el ejemplo anterior, simplificar las expresiones siguientes:

$$\frac{9x^3y^3}{36x^5y^3} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$= \underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{1 \cdot 9 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}{4 \cdot 9 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}$$

$$\frac{1}{4x^2}$$

31

Simplificar:

$$\frac{6m^2n^3}{18m^3n^3} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{1 \cdot 6 \cdot m \cdot m \cdot n \cdot n \cdot n}{3 \cdot 6 \cdot m \cdot m \cdot m \cdot n \cdot n \cdot n}$$

$$\frac{1}{3m}$$

32

Simplificar:

$$\frac{a^2}{ab} = \square$$

$$\frac{a}{b}$$

33

Simplificar:

$$\frac{2a}{8a^2b} = \square$$

$$\frac{1}{4ab}$$

34

Simplificar:

$$\frac{x^2 y^2}{x^3 y^3} = \boxed{}$$

$\frac{1}{xy}$

35

Simplificar:

$$\frac{ax^3}{4x^5 y} = \boxed{}$$

$\frac{a}{4x^2 y}$

36

Simplificar:

$$\frac{9x^2 y^3}{24a^2 x^3 y^4} = \boxed{}$$

$\frac{3}{8a^2 xy}$

37

Simplificar:

$$\frac{8m^4n^3x^2}{24mn^2x^2} = \underline{\qquad\qquad}$$

$\frac{m^3n}{3}$

38

Simplificar:

$$\frac{30x^6y^2}{45a^3x^4} = \underline{\qquad\qquad}$$

$\frac{2x^2y^2}{3a^3}$

39

Simplificar:

$$\frac{21mn^3x^6}{28m^4n^2x^2} = \underline{\qquad\qquad}$$

$\frac{3nx^4}{4m^3}$

40

La operación que hemos realizado equivale a

dividir el numerador y el denominador por su MCD o MFC

(máximo común divisor o máximo factor común).

41

Estudiar con atención.

$$\frac{6a^5b^7}{3a^8b^9c}$$

$$\textcircled{3}\cdot\textcircled{a}\cdot\textcircled{a}\cdot\textcircled{a}\cdot\textcircled{a}\cdot\textcircled{a}\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}\cdot b\cdot b\cdot c$$

$$\textcircled{3}\cdot 2\cdot\textcircled{a}\cdot\textcircled{a}\cdot\textcircled{a}\cdot\textcircled{a}\cdot\textcircled{a}\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}\cdot\textcircled{b}$$

$$MCD = 3\cdot a^5\cdot b^7 = 3a^5b^7$$

$$\frac{\dfrac{6a^5b^7}{3a^5b^7}}{\dfrac{3a^8b^9c}{3a^5b^7}} = \frac{2}{a^3b^2c}$$

42

De una expresión racional como ésta:

$$\frac{7a^3b^5}{3x^2}$$

en que el MCD o MFC del numerador y del denominador es igual a 1 (es decir el numerador y el denominador son primos entre sí), decimos que es

irreductible.

43

Estudiemos, ahora, algunas expresiones racionales en que el **numerador** y/o el **denominador** son

polinomios con más de un término.

44

Se requiere simplificar:

$$\frac{4a^2 - 4ab}{2a^2}$$

Si factorizamos el numerador, obtenemos:

$$\frac{\quad\quad}{2a^2}$$

$4a(a - b)$

45

$$\frac{4a(a - b)}{2a^2}$$

Al simplificar, obtenemos:

$$\frac{2(a - b)}{a}$$

46

Estudiar cuidadosamente este ejemplo de simplificación:

$$\frac{4a^2 - 4ab}{2a^2} = \frac{4a(a - b)}{2a^2} = \frac{2(a - b)}{a}$$

47

Se requiere simplificar

$$\frac{4x^2y^3}{24x^3y^3 - 36x^3y^4}$$

Si factorizamos el denominador, obtenemos:

$$\frac{4x^2y^3}{\square}$$

$12x^3y^3(2 - 3y)$

48

$$\frac{4x^2y^3}{12x^3y^3(2 - 3y)}$$

Al simplificar, obtenemos:

$$\square$$

$$\frac{1}{3x(2 - 3y)}$$

49

Se requiere simplificar

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{2ax - 6a}$$

Si factorizamos el numerador, obtenemos:

$$\frac{\square}{2ax - 6a}$$

$(x - 3)(x - 2)$

50

$$\frac{(x - 3)(x - 2)}{2ax - 6a}$$

Si factorizamos el denominador, obtenemos:

$$\frac{(x - 3)(x - 2)}{\square}$$

$2a(x - 3)$

51

$$\frac{\cancel{(x - 3)}(x - 2)}{2a\cancel{(x - 3)}}$$

Al simplificar, obtenemos:

$$\frac{\square}{\square}$$

$\frac{x - 2}{2a}$

52

Simplificar:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{(x + y)(x - y)}{(x + y)(x + y)}$$

$$\frac{x - y}{x + y}$$

53

Simplificar:

$$\frac{3x^2 - 4x - 15}{x^2 - 5x + 6} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{(3x + 5)(x - 3)}{(x - 3)(x - 2)}$$

$$\frac{3x + 5}{x - 2}$$

54

Simplificar:

$$\frac{45a^2b - 15a^3b^3}{30a^2b^2 - 10ab^3} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{15a^2b(3 - ab^2)}{10ab^2(3a - b)}$$

$$\frac{3a(3 - ab^2)}{2b(3a - b)}$$

55

Simplificar:

$$\frac{a^2 - 4ab + 4b^2}{a^3 - 8b^3} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{(a-2b)^2}{(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)}$$

$$\frac{a-2b}{2^2+2ab+4b^2}$$

56

Simplificar:

$$\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$\frac{a-b}{a+b}$$

57

Simplificar:

$$\frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 7x + 10} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{(x+4)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-2)}$$

$$\frac{x+4}{x-2}$$

58

Simplificar:

$$\frac{m^4 - 8m^2 + 15}{m^4 - 9} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{(m^2 - 5)(m^2 - 3)}{(m^2 + 3)(m^2 - 3)}$$

$$\frac{m^2 - 5}{m^2 + 3}$$

59

Simplificar:

$$\frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^3 - y^3} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{(x - y)^3}{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}$$

$$\frac{(x - y)^2}{x^2 + xy + y^2}$$

60

Simplificar:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2 - x^4} = \square$$

$$= \square$$

- $$\frac{(x - 2)^2}{x^2(4 - x^2)}$$

$$= \frac{(x - 2)^2}{x^2(2 + x)(2 - x)}$$

$$= \frac{(x - 2)^2}{-x^2(2 + x)(x - 2)}$$

atención

- $$= -\frac{x - 2}{x^2(x + 2)}$$

61

Simplificar:

$$\frac{8 - x^3}{x^2 + 2x - 8} = \square$$

$$\frac{(2 - x)(4 + 2x + x^2)}{(x + 4)(x - 2)}$$

$$= \frac{(2 - x)(4 + 2x + x^2)}{-(x + 4)(2 - x)}$$

atención

$$= \frac{4 + 2x + x^2}{-(x + 4)}$$

$$= -\frac{4 + 2x + x^2}{x + 4}$$

1.11.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.11.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *simplificar* expresiones racionales comunes con numerador y denominador monomios en $\mathbb{Z}$;
- *simplificar* expresiones racionales comunes con numerador y/o denominador polinomios en $\mathbb{Z}$.

11.3

Expresiones racionales equivalentes

62

Si se multiplican (o se dividen) los dos términos de una expresión racional por un mismo número, se obtiene una

expresión racional equivalente.

63

En ocasiones se requiere una

expresión racional con un numerador o un denominador dado.

64

Se requiere representar una expresión racional, por ejemplo,

$$\frac{2a}{3b}$$

como una

expresión racional equivalente, con numerador $6a^2$.

65

$$\frac{2a}{3b} = \frac{6a^2}{?}$$

Para determinar el denominador de la nueva expresión, nos preguntamos, ¿por cuál número tenemos que multiplicar **2a** para obtener **$6a^2$**?

$$\frac{6a^2}{2a} = 3a$$

3a

66

$$\frac{2a}{3b} = \frac{6a^2}{?}$$

$2a \cdot 3a$

Para que el valor de la expresión no se altere, se requiere multiplicar el denominador **3b** por

3a

67

$$\frac{2a}{3b} = \frac{6a^2}{\square}$$

($2a \cdot 3a$ sobre $6a^2$; $3b \cdot 3a$ bajo $\square$)

9ab

68

$$\frac{2a}{3b} = \frac{6a^2}{9ab}$$

expresión equivalente con el numerador dado

69

Otro ejemplo:

$$\frac{a}{4x^3} = \frac{\square}{20a^2x^4}$$

expresión equivalente con el denominador dado.

$5a^3x$

70

Observar con atención las operaciones efectuadas.

$$\times\ \frac{a}{4x^3} = \frac{5a^3x}{20a^2x^4}$$

(=, ÷)

$$\frac{20a^2x^4}{4x^3} = 5a^2x$$

$$5a^2x \cdot a = 5a^3x$$

71

$$\frac{3}{2a} = \frac{\square}{4a^2}$$

$$\times\ \frac{3}{2a} = \frac{6a}{4a^2}$$

(=, ÷)

$$\frac{4a^2}{2a} = 2a$$

$$2a \cdot 3 = 6a$$

72

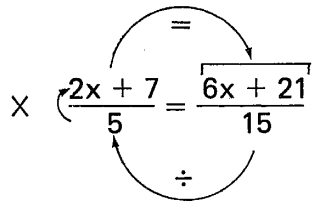
Las dos expresiones,

$$\frac{3}{2a} \quad y \quad \frac{6a}{4a^2}$$

Son equivalentes porque se han multiplicado los dos términos por un mismo número: 2a.

73

$$\frac{2x+7}{5} = \frac{\square}{15}$$



$$\frac{15}{5} = 3$$

$$3 \cdot (2x + 7) = 6x + 21$$

74

$$\frac{2x}{x-1} = \frac{\square}{x^2 - x}$$

$$\frac{2x}{x-1} = \frac{2x^2}{x^2 - x}$$

75

$$\frac{5x}{a-b} = \frac{\square}{a^2 - b^2}$$

- $5ax + 5bx$

de modo que:

$$\frac{5x}{a-b} = \frac{5ax + 5bx}{a^2 - b^2}$$

1.11.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.11.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *transformar* una expresión racional dada, en otra equivalente con numerador o denominador dado.

11.4

Suma y resta de expresiones racionales comunes

76

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{\square}{\square}$$

De la definición de suma en $\mathbb{Q}$:

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 5}$$

$$= \frac{10 + 20}{25}$$

$$= \frac{30}{25}$$

$$\bullet = \frac{6}{5}$$

77

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

78

$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \square$

$\frac{10}{4}$

79

$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \square$

$\frac{9}{5}$

80

$\frac{5}{7} + \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \square$

$\frac{5+3-2}{7} = \frac{6}{7}$

81

En forma similar:

$$\frac{3}{a} + \frac{8}{a} = \frac{\square}{\square}$$

$\frac{11}{a}$

82

$$\frac{5}{3a^2} + \frac{7}{3a^2} - \frac{1}{3a^2} \frac{\square}{\square}$$

$\frac{11}{3a^2}$

83

$$\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+1} = \frac{\square}{\square}$$

$\frac{5}{x+1}$

84

$$\frac{10}{(x-1)^2} - \frac{6}{(x-1)^2} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{4}{(x-1)^2}$$

85

$$\frac{3a}{b^2} + \frac{5a}{b^2} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{8a}{b^2}$$

86

$$\frac{4a}{x^2} + \frac{5b}{x^2} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{4a + 5b}{x^2}$$

87

$$\frac{3ax}{x-1} - \frac{x^2}{x-1} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{3ax - x^2}{x-1}$$

88

$$-\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{-x^2 + y^2}{a}$$

89

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x^2} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{a + b - c}{x^2}$$

90

En general:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d} = \square$$

$$\frac{a + b - c}{d}$$

91

Ahora bien:

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{7} = \square$$

De la definición de suma en $\mathbb{Q}$:

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 7}$$

$$= \frac{14 + 20}{35}$$

$$\bullet = \frac{34}{35}$$

92

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \square$$

$$\frac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 7}{4 \cdot 8}$$

$$= \frac{24 + 28}{32} = \frac{52}{32}$$

$$\bullet = \frac{13}{8}$$

93

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{5} = \square$$

$$\frac{5 \cdot 5 - 2 \cdot 3}{2 \cdot 5}$$

$$= \frac{25 - 6}{10}$$

$$\bullet = \frac{19}{10}$$

94

Un procedimiento alternativo consiste en reducir las expresiones racionales a un común denominador.
El común denominador más conveniente es el **mínimo común múltiplo** (mcm) de los denominadores.
Veamos un ejemplo en los siguientes cuadros.

95

Tenemos una suma, cuyo resultado conocemos:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \frac{13}{8}$$

Determinemos el mcm de los denominadores 4 y 8:

4	8	2
2	4	2
1	2	2
	1	

8

mcm = 2 · 2 · 2 = 8

96

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \frac{\square}{8} + \frac{\square}{8}$$

Se requiere determinar los numeradores para que las nuevas expresiones racionales sean equivalentes a las expresiones dadas (véase cuadro siguiente).

97

Apliquemos el procedimiento estudiado en el submódulo anterior:

$$\times \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{8} \overset{=}{\underset{\div}{=}} \frac{6}{8} + \frac{7}{8}\right)$$

$$\frac{8}{4} = 2 \qquad \frac{8}{8} = 1$$

$$2 \cdot 3 = 6 \qquad 1 \cdot 7 = 7$$

98

Observar con atención.

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \frac{6}{8} + \frac{7}{8} = \frac{6+7}{8} = \frac{13}{8}$$

mcm de 4 y 8

99

Otro ejemplo ya resuelto:

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{5} = \frac{19}{10}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{5} = \square$$

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{5} = \frac{25}{10} - \frac{6}{10}$$

$$= \frac{25 - 6}{10}$$

$$= \frac{19}{10}$$

100

$$\frac{1}{7} + \frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \underline{\quad\quad}$$

mcm = 28

$$\frac{4 + 70 + 21}{28} = \frac{95}{28}$$

101

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{10} - \frac{5}{4} = \underline{\quad\quad}$$

mcm = 20

$$\frac{12 + 2 - 25}{20} = \frac{-11}{20}$$

$$= -\frac{11}{20}$$

102

$$\frac{7}{5} + \frac{5}{6} = \boxed{\qquad\qquad}$$

mcm de 5 y 6 = 30

$$\frac{7}{5} + \frac{5}{6} =$$

$$= \frac{6 \cdot 7 + 5 \cdot 5}{30}$$

$$= \frac{42 + 25}{30}$$

$$= \frac{67}{30}$$

103

Observamos que, cuando los denominadores son

primos entre sí,

su mcm es igual al producto de éstos.

1.11.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

104

Determinación del mínimo común múltiplo de dos o más monomios.

105

Atención.

Dos monomios:

ax^2	a^3x	a	a^3
x^2	a^2x	a	
x^2	ax	a	
x^2	x	x	x^2
x	1	x	
1			

$mcm = a^3x^2$

106

ax^2 $\quad$ a^3x $\quad$ $mcm = a^3x^2$

Observemos que

a^3x^2

es la expresión de menor grado, divisible por cada una de las expresiones dadas.*

* Otras expresiones de mayor grado, divisibles por las expresiones dadas, son: a^4x^3, a^5x^3, a^5x^4, a^4x^4, etc.

107

Dos monomios:

$6x^2y^3$ $\qquad$ $4x^3y^2$

mcm = ⌊ ⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Atención.

$6x^2y^3$	$4x^3y^2$	2	2^2
$3x^2y^3$	$2x^3y^2$	2	
$3x^2y^3$	x^3y^2	3	3^1
x^2y^3	x^3y^2	x	x^3
xy^3	x^2y^2	x	
y^3	xy^2	x	
y^3	y^2	y	y^3
y^2	y	y	
y	1	y	
1	mcm = $12x^3y^3$		

108

$6x^2y^3$ $\qquad$ $4x^3y^2$ $\qquad$ mcm = $12x^3y^3$

Observemos que

$12x^3y^3$

es la expresión de menor coeficiente numérico y de menor grado, divisible por cada una de las expresiones dadas.*

* Otras expresiones de mayor coeficiente y mayor grado, divisibles por las expresiones dadas, son: $24x^4y^4$, $36x^6y^4$, $36x^6y^6$, etc.

109

Por simple inspección, determinemos el mínimo común múltiplo de las expresiones siguientes:

a^2 ab^2

mcm = [ ]

a^2b^2

110

x^2y xy^2

mcm = [ ]

x^2y^2

111

ab^2c a^2bc

mcm = [ ]

a^2b^2c

112

a^2x^3 a^3bx^2

mcm = ____

a^3bx^3

113

a^3 ab^2 a^2b

mcm = ____

a^3b^2

114

x^2y xy^2 xy^3z

mcm = ____

x^2y^3z

115

ab^2 bc^2 a^2c^3 b^3c^3

mcm = ⌊____⌋

$a^2b^3c^3$

116

$6m^2n$ $4m^3$

mcm = ⌊____⌋

$12m^3n$

117

$9ax^3y^4$ $15x^2y^5$

mcm = ⌊____⌋

$45ax^3y^5$

118

$2ab^2$ $4a^2b$ $8a^3$

mcm = ____

$8a^3b^2$

119

$10m^2$ $15mn^2$ $20n^3$

mcm = ____

$60m^2n^3$

120

$5ab$ $6x^2y$

mcm = ____

$30abx^2y$

121

Cuando las expresiones son

primas entre sí,

su mcm es igual al producto
de las mismas.

122

Por lo tanto, el mínimo
común múltiplo de

a b c

es $\lfloor\_\_\_\_\rfloor$

abc

1.11.4.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

123

Mínimo común múltiplo de dos o más polinomios.

124

Se requiere determinar el mínimo común múltiplo de los polinomios:

$x^2 + 2xy + y^2$ $\qquad$ $x^2 - y^2$

125

Estudiar con atención.

$x^2 + 2xy + y^2$ $\qquad$ $x^2 - y^2$

Primero, expresamos los polinomios como productos de factores. Así, tenemos:

_____ _____

Respuesta en el cuadro siguiente

$x^2 + 2xy + y^2$ → $(x + y)^2$

$x^2 - y^2$ → $(x + y)(x - y)$

mcm = $(x + y)^2 (x - y)$

126

Dos polinomios:

$x^2 - 2x + 1$ $\qquad$ $x^2 - 1$

mcm = [ ]

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$(x - 1)^2 (x + 1)$

127

Dos polinomios:

6 $\qquad$ $3x - 3$

mcm = [ ]

$3x - 3 = 3(x - 1)$

(mcm de 6 y 3 = 6)

$6(x - 1)$

128

$2x \qquad 4x - 8$

mcm = $\square$

$2x = 2x$

$4x - 8 = 4(x - 2)$

$4x(x - 2)$

129

$3b \qquad ab - b^2$

mcm = $\square$

$3b = 3b$

$ab - b^2 = b(a - b)$

$3b(a - b)$

130

$3m^2 \qquad mn - m^2$

mcm = $\square$

$3m^2$

$mn - m^2 = m(n - m)$

$3m^2(n - m)$

131

x^2y $\quad$ $x^2y + xy^2$

mcm = $\underline{\quad\quad\quad}$

x^2y

$x^2y + xy^2 = xy(x + y)$

$x^2y(x + y)$

132

2a $\quad$ 6ab $\quad$ $3a^2 - 6ab$

mcm = $\underline{\quad\quad\quad}$

2a

6ab

$3a^2 - 6ab = 3a(a - 2b)$

$6ab(a - 2b)$

133

$3x + 3$ $\quad$ $6x - 6$

mcm = $\underline{\quad\quad\quad}$

$3x + 3 = 3(x + 1)$

$6x - 6 = 6(x - 1)$

$6(x + 1)(x - 1)$

$= 6(x^2 - 1)$

134

$5x + 10 \qquad 10x^2 - 40$

mcm = ⌊_____⌋

$5x + 10 = 5(x + 2)$

$10x - 40 = 10(x^2 - 4)$

$= 10(x + 2)\ (x - 2)$

$10(x + 2)(x - 2)$

$= 10(x^2 - 4)$

135

$(x + 1)^2 \qquad x^2 + 1$

mcm = ⌊_____⌋

$(x + 1)^2 (x^2 + 1)$

136

Cuando los polinomios son

primos entre sí,

su mcm es igual al producto de éstos.

137

Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de

$a + b$ $\qquad$ $c + d + e$

es $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

$(a + b)(c + d + e)$

138

$3x^2 + 5x - 8$ $\qquad$ $2a + 5b$

mcm = $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

$(3x^2 + 5x - 8)(2a + 5b)$

1.11.4.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

139

Para efectuar la suma

$$\frac{3}{a} + \frac{b}{ac^2}$$

es necesario determinar el mínimo común múltiplo de los denominadores.

mcm = $\underline{\qquad\qquad}$

ac^2

140

Entonces:

$$\frac{3}{a} + \frac{b}{ac^2} = \underline{\qquad\qquad}$$

$\dfrac{3c^2 + b}{ac^2}$

141

$$\frac{b}{2a} + \frac{a - 2}{6a^2}$$

mcm de los denominadores = $\underline{\qquad\qquad}$

$6a^2$

142

$$\frac{b}{2a} + \frac{a-2}{6a^2} = \square$$

$$\frac{3ab + a - 2}{6a^2}$$

143

$$\frac{x-2}{5x^2} + \frac{1}{10x}$$

mcm de los denominadores = $\square$

$10x^2$

144

$$\frac{x-2}{5x^2} + \frac{1}{10x} = \square$$

☞ Atención.

$$\frac{2(x-2) + x}{10x^2}$$

$$= \frac{2x - 4 + x}{10x^2}$$

$$\bullet = \frac{3x - 4}{10x^2}$$

145

$\frac{n}{m^2} + \frac{3}{mn} - \frac{2}{m}$

mcm de los denominadores = ⌊_____⌋

$m^2 n$

146

$\frac{n}{m^2} + \frac{3}{mn} - \frac{2}{m} =$ ⌊_____⌋

$\frac{n^2 + 3m - 2mn}{m^2 n}$

1.11.4.4

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

147

Ahora, se requiere efectuar la suma

$$\frac{a}{x^2 - 1} + \frac{b}{x^2 + 2x + 1}$$

mcm de los denominadores = [ ]

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

$(x + 1)^2(x - 1)$

148

$$\frac{a}{x^2 - 1} + \frac{b}{x^2 + 2x + 1} = [\quad]$$

$$\frac{a(x + 1) + b(x - 1)}{(x + 1)^2(x - 1)}$$

149

$$\frac{5}{3x + 3} - \frac{1}{6x - 6}$$

mcm de los denominadores = [ ]

$3x + 3 = 3(x + 1)$

$6x - 6 = 6(x - 1)$

$6(x + 1)(x - 1)$

$= 6(x^2 - 1)$

150

$$\frac{5}{3x+3} - \frac{1}{6x-6} = \boxed{\qquad\qquad}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

Estudiar con atención.

$$\frac{5}{3x+3} - \frac{1}{6x-6} = \frac{5 \cdot \overset{①}{\overbrace{2(x-1)}} - \overset{②}{\overbrace{(x+1)}}}{6(x+1)(x-1)} = \frac{10x-10-x-1}{6(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{9x-11}{6(x^2-1)}$$

① $\dfrac{6(x+1)(x-1)}{3(x+1)} = 2(x-1)$

② $\dfrac{6(x+1)(x-1)}{6(x-1)} = x+1$

151

$$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{c+d}$$

mcm de los denominadores $= \boxed{\qquad\qquad}$

$(a+b)(c+d)$

152

$$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{c+d} = \boxed{}$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{c+d} = \frac{x(c+d) - y(a+b)}{(a+b)(c+d)}$$

Comparar esta igualdad con la definición de la resta en $\mathbb{Q}$.

1.11.4.5

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.11.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* la suma de dos o más expresiones racionales comunes dadas, con denominadores monomios en $\mathbb{Z}$;
- *efectuar* la suma de dos o más expresiones racionales comunes dadas, con denominadores polinomios en $\mathbb{Z}$;
- *efectuar* la resta de dos expresiones racionales comunes dadas, con denominadores polinomios en $\mathbb{Z}$.

11.5

Expresiones racionales mixtas

153

$$3 + \frac{2}{5} = \boxed{\qquad\qquad}$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Estudiar con atención.

$$\underbrace{3 + \frac{2}{5}} = \frac{3}{1} + \frac{2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

expresiones equivalentes

Recordemos que: $3\,\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$

Transformación de una expresión mixta en una fracción común impropia.

154

$4 + \frac{3}{5} = \square$

$\frac{23}{5}$

155

$1 - \frac{1}{4} = \square$

$\frac{3}{4}$

156

$3 - \frac{2}{7} = \square$

$\frac{19}{7}$

157

$\frac{3}{4} - 1 = \square$

$-\frac{1}{4}$

1.11.5.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

158

$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1 = \square$

$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{1}$

$= \frac{15 - 8 + 20}{20}$

$= \frac{27}{20}$

159

$3\frac{3}{4} + 5\frac{2}{7} = \square$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Estudiar con atención.

$$3\frac{3}{4} + 5\frac{2}{7} = \frac{15}{4} + \frac{37}{7} = \frac{105 + 148}{28} = \frac{253}{28}$$

expresión mixta equivalente $\longrightarrow$ $\square$

$9\frac{1}{28}$

160

$1\frac{7}{8} + 2\frac{3}{4} = \square$

$$\frac{15}{8} + \frac{11}{4}$$

$$= \frac{15 + 22}{8}$$

$$= \frac{37}{8}$$

o bien:

● $= 4\frac{5}{8}$

1.11.5.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

161

$$x + \frac{x+2}{3} = \boxed{\qquad\qquad}$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Estudiar cuidadosamente esta transformación de una expresión racional mixta en una expresión racional común.

$$\underbrace{x + \frac{x+2}{3}}_{\text{expresión racional mixta}} = \frac{x}{1} + \frac{x+2}{3} = \frac{3x + (x+2)}{3}$$

$$= \frac{3x + x + 2}{3}$$

$$= \frac{4x + 2}{3} \leftarrow \text{expresión racional común}$$

162

Transformar la siguiente expresión racional mixta en una expresión racional común equivalente:

$$x^2 + 2x + \frac{1}{x} = \boxed{\qquad\qquad}$$

expresión racional mixta

$$x^2 + 2x + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^2}{1} + \frac{2x}{1} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x}$$

expresión racional común

163

$$3x^2 - 2x + \frac{3}{x-2} = \boxed{\qquad\qquad}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

expresión racional mixta

$$3x^2 - 2x + \frac{3}{x-2} = \frac{3x^2}{1} - \frac{2x}{1} + \frac{3}{x-2}$$

$$= \frac{3x^2(x-2) - 2x(x-2) + 3}{x-2}$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^2 + 4x + 3}{x-2}$$

$$= \frac{3x^3 - 8x^2 + 4x - 3}{x-2}$$

expresión racional común

1.11.5.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.11.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *transformar* una expresión racional mixta en una expresión racional común.

11.6

Multiplicación de expresiones racionales

164

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \boxed{}$$

$$\frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

165

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{}$$

$$\frac{5 \times 1}{8 \times 4} = \frac{5}{32}$$

166

$\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=$ ⌊_____⌋

$\frac{15}{28}$

167

$\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=$ ⌊_____⌋

$-\frac{4}{15}$

168

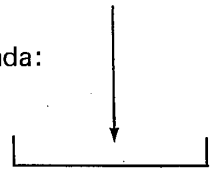
$\frac{a}{b}\cdot\frac{3a}{b}=$ ⌊_____⌋

$\frac{3a^2}{b^2}$

169

$$\frac{2a^2}{3b} \cdot \frac{6b^2}{4a} = \square$$

Expresión simplificada:



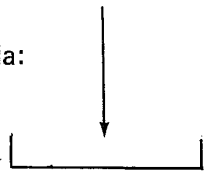
$\frac{12a^2b^2}{12ab}$

ab

170

$$\frac{x^2y}{5} \cdot \frac{10x^3}{3y} = \square$$

Expresión simplificada:



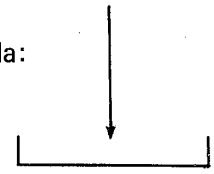
$\frac{10x^5y}{15y}$

$\frac{2x^5}{3}$

171

$$\frac{5}{a} \cdot \frac{2a}{b^2} \cdot \frac{3b}{10} = \square$$

Expresión simplificada:



$\frac{30ab}{10ab^2}$

$\frac{3}{b}$

172

$$\left(-\frac{3ab^2}{x}\right)\left(-\frac{x^2}{3ab}\right) = \square$$

Expresión simplificada:

$$\square$$

$$\frac{3ab^2x^2}{3abx}$$

bx

1.11.6.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario

173

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \square$$

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{15}{4}$$

174

$\frac{5}{7} \cdot 4 =$ ____

$\frac{20}{7}$

175

$\left(-\frac{3}{8}\right) \cdot 3 =$ ____

$-\frac{9}{8}$

176

$\frac{3a}{b} \cdot c =$ ____

$\frac{3ac}{b}$

177

$$\frac{5ab}{c} \cdot b^2 = \square$$

$$\frac{5ab^3}{c}$$

178

$$\frac{x}{x^2 - 1} \cdot x^3 = \square$$

$$\frac{x^4}{x^2 - 1}$$

179

$$\frac{x + 1}{a} \cdot (-1) = \square$$

$$-\frac{x + 1}{a}$$

1.11.6.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

180

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \square$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$= \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2}$$

181

$$\left(\frac{5}{a}\right)^2 = \square$$

$$\frac{25}{a^2}$$

182

$$\left(\frac{2a}{b^2}\right)^3 =$$

$$\frac{(2a)^3}{(b^2)^3} = \frac{8a^3}{b^6}$$

183

En general,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$$

$$\frac{a^n}{b^n}$$

1.11.6.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.11.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el producto de dos o más expresiones racionales comunes.

11.7

División de expresiones racionales comunes

184

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{2} = \_\_\_\_$$

Debemos recordar que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d^*}{c}$$

$$\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

* $\frac{d}{c}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{c}{d}$

185

$$\frac{3}{7} \div \frac{2}{5} = \_\_\_\_$$

$$\frac{15}{14}$$

186

$$\frac{5}{2} \div \frac{3}{7} = \square$$

$\frac{35}{6}$

187

$$\frac{x^2}{3y^2} \div \frac{2x}{y^3} = \square$$

Expresión simplificada: $\square$

$\frac{x^2y^3}{6xy^2}$

$\frac{xy}{6}$

188

$$\frac{3a^2b}{5x^2} \div a^2b^3 = \square$$

Expresión simplificada: $\square$

Estudiar con atención:

$$\frac{3a^2}{5x^2} \div \frac{a^2b^3}{1}$$

$$= \frac{3a^2}{5a^2b^3x^2}$$

$$= \frac{3}{5b^3x^2}$$

189

$6a^2x^3 \div \frac{a^2x}{5} =$ ____

Expresión simplificada: ____

$\frac{6a^2x^3}{1} \div \frac{a^2x}{5}$

$= \frac{30a^2x^3}{a^2x}$

$= 30x^2$

190

$\frac{1}{ax^2} \div \frac{1}{x^4} =$ ____

Expresión simplificada: ____

$\frac{x^4}{ax^2}$

$= \frac{x^2}{a}$

191

En general:

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} =$ ____

$\frac{ad}{bc}$

192

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Este cociente también puede ser expresado así:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

193

Estudiar con atención.

$$\times \left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \right) \times = \frac{ad}{bc}$$

194

$$\frac{\frac{3a}{5b}}{\frac{10b}{?}} = \boxed{}$$

$$\frac{9a}{50b^2}$$

195

$$\frac{\frac{3x^2}{5}}{-\frac{x^3}{4}} = \boxed{}$$

$$-\frac{12x^2}{5x^3} = -\frac{12}{5x}$$

196

$$\frac{\frac{x^2-1}{ay}}{\frac{x-2}{bx^2}} = \boxed{}$$

$$\frac{(x^2-1)bx^2}{(x-2)ay}$$

197

$$\frac{\frac{7x^2}{a}}{\frac{5x}{a}} = \boxed{}$$

$$\frac{7x^2 \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot 5x}$$

$$= \frac{7x^2}{5x}$$

$$= \frac{7x}{5}$$

198

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \square$$

$$\frac{a \cdot \cancel{b}}{\cancel{b} \cdot c} = \frac{a}{c}$$

199

Tomemos nota de esta importante regla para la simplificación de algunas expresiones racionales compuestas.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{c}$$

200

Por simple inspección:

$$\frac{\frac{3}{x}}{\frac{5}{x}} = \square$$

$$\frac{3}{5}$$

201

Por simple inspección:

$$\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \square$$

$$-\frac{b}{c}$$

202

Por simple inspección:

$$\frac{\frac{2a^2 - b^2}{a}}{\frac{a^4 + 1}{a}} = \square$$

$$\frac{2a^2 - b^2}{a^4 + 1}$$

203

Atención.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \square$$

Atención

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{bc}$$

204

$$\frac{\frac{3a}{5b}}{b} = \square$$

$\frac{3a}{5b^2}$

205

$$\frac{\frac{x^2 + 2}{3x}}{5x^2} = \square$$

$\frac{x^2 + 3}{15x^3}$

206

$$\frac{\frac{3x + 2}{x}}{3x + 2} = \square$$

$\frac{1}{x}$

207

Ahora bien:

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \boxed{}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{\frac{b}{c}}} = \frac{ac}{b}$$

208

$$\frac{\frac{2x-1}{x^2}}{x-2} = \boxed{}$$

$$\frac{(2x-1)(x-2)}{x^2}$$

209

$$\frac{3}{\frac{5a}{7b}} = \boxed{}$$

$$\frac{21b}{5a}$$

210

No olvidemos esta importante regla para la simplificación de expresiones racionales compuestas, a veces llamada "regla del sandwich":

$$\times \left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \right) \times = \frac{ad}{bc}$$

211

Las reglas dadas en los tres cuadros siguientes, son casos particulares de la regla básica

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

y también conviene tenerlas presentes.

212

$$\left(\frac{\frac{a}{b}}{c} \right) = \frac{a}{bc}$$

213

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$$

214

$$\frac{a}{\frac{\cancel{b}}{\cancel{b}}} = \frac{a}{c}$$

1.11.7.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

215

$\frac{0}{x} = \square$

$\frac{0}{x} = 0$

ya que

$x \cdot 0 = 0$

216

$\frac{x}{0} = \square$

$\frac{x}{0} = \begin{cases} \text{número} \\ \text{no definido} \end{cases}$

217

$\frac{x}{x} = \square$

$\frac{x}{x} = 1$

para $x \neq 0$

1.11.7.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.11.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el cociente de dos expresiones racionales comunes;
- *efectuar* la simplificación de una expresión racional compuesta de la forma

$$\frac{A}{B}$$

en que A y B son expresiones racionales comunes.

11.8

División de expresiones racionales mixtas

218

Queremos simplificar esta expresión racional compuesta:

$$\frac{x - \frac{x}{y}}{y - \frac{3}{y}} = \frac{\square}{y - \frac{3}{y}}$$

Para ello es necesario seguir los tres pasos siguientes:

1º Transformar el **dividendo** en una **expresión racional común.**

$$\frac{xy - x}{y}$$

219

$$\frac{x - \frac{x}{y}}{y - \frac{3}{y}} = \frac{\frac{xy - x}{y}}{\square}$$

2º Transformar el **divisor** en una **expresión racional común.**

$$\frac{y^2 - 3}{y}$$

220

$$\frac{x - \frac{x}{y}}{y - \frac{3}{y}} = \frac{\frac{xy - x}{y}}{\frac{y^2 - 3}{y}} = \frac{\square}{\square}$$

3º: Simplificar la expresión resultante, si es posible.

Respuesta en el cuadro siguiente

Atención.

transformaciones

$$\frac{x - \frac{x}{y}}{y - \frac{3}{y}} = \frac{\frac{xy - x}{\cancel{y}}}{\frac{y^2 - 3}{\cancel{y}}} = \frac{xy - x}{y^2 - 3}$$

estado inicial — estado final

221

Simplificar:

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{\square}{\square}$$

expresiones racionales comunes equivalentes

$$\frac{a^2 - b^2}{ab}$$

$$\frac{a + b}{a}$$

222

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a+b}{a}}=\frac{\square}{\square}$$

expresión racional **simple**

$$\frac{a(a^2-b^2)}{ab(a+b)}$$

223

Simplifiquemos la expresión resultante:

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a+b}{a}}=\frac{a(a^2-b^2)}{ab(a+b)}=\frac{\overbrace{\square}^{\text{expresión descompuesta en factores primos}}}{ab(a+b)}$$

$$a(a+b)(a-b)$$

224

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a+b}{a}}=\frac{a(a^2-b^2)}{ab(a+b)}=\frac{a(a+b)(a-b)}{ab(a+b)}$$

expresión **irreductible** $=\dfrac{\square}{\square}$

$$\frac{a-b}{b}$$

225

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}} = \frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a+b}{a}} = \frac{a(a^2-b^2)}{ab(a+b)} = \frac{a(a+b)(a-b)}{ab(a+b)}$$

estados intermedios

estado inicial

$$= \boxed{\frac{a-b}{b}}$$

estado final

226

Otro ejemplo:

Estado inicial: $\dfrac{1+\frac{1}{x-1}}{1+\frac{1}{x^2-1}} =$

Transformaciones: ____

Estado final: ____

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\frac{1+\frac{1}{x-1}}{1+\frac{1}{x^2-1}} = \frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x^2-1+1}{x^2-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x^2}{x^2-1}} = \frac{x(x^2-1)}{x^2(x-1)}$$

$$= \frac{x(x+1)(x-1)}{x^2(x-1)} = \frac{x+1}{x}$$

227

Estado inicial: Transformaciones: Estado final:

$$\frac{\frac{2}{1-a}+\frac{2}{1+a}}{\frac{2}{1+a}-\frac{2}{1-a}} = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\frac{\frac{2}{1-a}+\frac{2}{1+a}}{\frac{2}{1+a}-\frac{2}{1-a}} = \frac{2(1+a)+2(1-a)}{2(1-a)-2(1+a)} = \frac{2+2a+2-2a}{2-2a-2-2a}$$

$$= \frac{\frac{4}{(1-a)(1+a)}}{\frac{-4a}{(1+a)(1-a)}} = \frac{4}{-4a} = -\frac{1}{a}$$

228

Estado inicial: Transformaciones: Estado final:

$$\frac{1}{x-\frac{x}{x-\frac{x^2}{x+1}}} = \boxed{\qquad\qquad} \qquad \boxed{\qquad\qquad}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\frac{1}{x-\dfrac{x}{x-\dfrac{x^2}{x+1}}} = \frac{1}{x-\dfrac{x}{\dfrac{x(x+1)-x^2}{x+1}}} = \frac{1}{x-\dfrac{x}{\dfrac{x^2+x-x^2}{x+1}}} = \frac{1}{x-\dfrac{x}{\dfrac{x}{x+1}}}$$

$$= \frac{1}{x-\dfrac{(x+1)x}{x}} = \frac{1}{x-(x+1)} = \frac{1}{x-x-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

1.11.8.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.11.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *simplificar* expresiones racionales de la forma

  $$\frac{A}{B}$$

  en que A y B son expresiones racionales mixtas.

11.9

Operaciones con polinomios en $\mathbb{Q}$

229

Esta es la forma general de un polinomio en $\mathbb{Q}$ con una indeterminada:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

- coeficientes racionales
- exponentes naturales

230

Forma general de un polinomio en $\mathbb{Q}$ con varias indeterminadas:

suma de términos de la forma $ax^n y^m z^r \ldots$

- $a \in \mathbb{Q}$
- $n, m, r \in \mathbb{N}$

231

Sean dos polinomios:

$$\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{7}x + \frac{3}{8} \qquad \frac{2}{5}x^2 + \frac{5}{7}x - \frac{1}{10}$$

Polinomio suma

Respuesta
en el
cuadro siguiente

polinomios sumandos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{7}x + \frac{3}{8} \\ \frac{2}{5}x^2 + \frac{5}{7}x - \frac{1}{10} \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{7} + \frac{5}{7}\right)x + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{10}\right)$$

polinomio suma: $\frac{23}{20}x^2 + \frac{4}{7}x + \frac{11}{40}$

1.11.9.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

232

Restar al polinomio → $-3\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{8}x^3 - \frac{3}{5}$

el polinomio → $\frac{2}{7}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

Polinomio diferencia → ⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Estudiar con atención.

polinomio minuendo: → $-3\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{8}x^3 \qquad\qquad -\frac{3}{5}$

polinomio sustraendo: → $\frac{2}{7}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

signos del inverso
aditivo del sustraendo: → $- \quad + \quad - \quad -$

$$-3\frac{3}{4}x^4 + \left(\frac{5}{8} - \frac{2}{7}\right)x^3 + 5x^2 - \frac{1}{2}x + \left(-\frac{3}{5} - 2\right)$$

polinomio diferencia: → $-\frac{15}{4}x^4 + \frac{19}{56}x^3 + 5x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{13}{5}$

1.11.9.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

233

Sean dos polinomios:

$$\frac{10}{7}x^2y^3 - \frac{3}{4}xy^4 \qquad \frac{1}{2}xy - \frac{3}{5}$$

Polinomio producto:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Estudiar con atención.

polinomios factores $\longrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{10}{7}x^2y^3 - \frac{3}{4}xy^4 \\ \frac{1}{2}xy - \frac{3}{5} \end{array} \right.$

$$\frac{10}{14}x^3y^4 - \frac{3}{8}x^2y^5 - \frac{30}{35}x^2y^3 + \frac{9}{20}xy^4$$

polinomio producto con coeficientes irreductibles: $\longrightarrow$ $\frac{5}{7}x^3y^4 - \frac{3}{8}x^2y^5 - \frac{6}{7}x^2y^3 + \frac{9}{20}xy^4$

1.11.9.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

234

Dividir el polinomio → $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{7}x + 8$

entre el polinomio → $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

Polinomio cociente → [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\begin{array}{r|l} & \frac{3}{5}x + \frac{33}{140} \\ \hline \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} & \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{7}x + 8 \\ & -\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{10}x \\ \hline & \frac{11}{70}x + 8 \\ & -\frac{11}{70}x + \frac{33}{280} \\ \hline & \frac{2273}{280} \end{array}$$

polinomio divisor → $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ ← polinomio dividendo

$\frac{2273}{280}$ ← residuo

235

Dividendo: → $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{7}x + 8$

Divisor: → $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

Cociente parcial: → $\frac{3}{5}x + \frac{33}{140}$

Residuo: → $\frac{2273}{280}$

Comprobación: [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Recordemos que:

dividendo = divisor x cociente parcial + residuo

cociente parcial → $\frac{3}{5}x + \frac{33}{140}$

divisor → $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{5}x^2 + \frac{11}{70}x$$
$$-\frac{3}{10}x - \frac{33}{280}$$
$$\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{7}x - \frac{33}{280}$$

residuo → $+\frac{2273}{280}$

dividendo → $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{7}x + 8$

se verifica.

236

El cociente puede ser expresado así:

$$\frac{3}{5}x + \frac{33}{140} + \frac{\frac{2273}{280}}{\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}}$$

¿Esta expresión es un polinomio?

Sí/No

No

1.11.9.4

Práctica adicional
si
se considera necesario.

237

Cuadrado de un binomio en $\mathbb{Q}$:

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \square$$

$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$

un **trinomio cuadrado perfecto** en $\mathbb{Q}$

238

Producto de dos binomios conjugados en $\mathbb{Q}$:

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = \square$$

$x^2 - \frac{1}{16}$

"diferencia de cuadrados" en $\mathbb{Q}$

239

Producto de dos binomios con un término común en $\mathbb{Q}$:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = \square$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}.$$

trinomio de la forma $x^2 + px + q$ en $\mathbb{Q}$.

240

Producto de dos binomios de la forma $ax + b$ en $\mathbb{Q}$:

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\right) = \square$$

$$\frac{1}{10}x^2 + \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10}\right)x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{15}$$

trinomio de la forma $px^2 + qx + r$ en $\mathbb{Q}$

241

Producto de un binomio de la forma $a - b$ y un trinomio de la forma $a^2 + ab + b^2$, ambos en $\mathbb{Q}$:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \square$$

$$x^3 - \frac{1}{8}$$

"diferencia de cubos" en $\mathbb{Q}$

1.11.9.5

Práctica adicional de

productos notables y factorización en $\mathbb{Q}$

si se considera necesario.

1.11.9

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* operaciones de suma, recta, multiplicación y división de polinomios en $\mathbb{Q}$;
- *determinar,* por simple inspección, el resultado de las operaciones siguientes:

$$(a \pm b)^2$$
$$(a + b)(a - b)$$
$$(x + a)(x + b)$$
$$(ax + b)(cx + d)$$
$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

  en que a, b, c, d son números racionales o monomios en $\mathbb{Q}$;
- *factorizar* polinomios en $\mathbb{Q}$.

11.10

Restricciones para una expresión racional

242

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$$

Ésta será considerada

una expresión **racional,**

siempre que

$$x - 1 \neq 0$$

243

$$\frac{3x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3}$$

será una expresión racional si

$$x^2 - 3 \neq 0$$

244

$$\frac{3x^2 - 5x + 4}{x}$$

será una expresión racional si

_____

$x \neq 0$

245

$$\frac{3x^2 y - 4xy^2}{xy + 1}$$

será una expresión racional si

_____

$xy + 1 \neq 0$

1.11.10.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.11.10

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *señalar* la condición para que una determinada expresión de la forma A/B sea una expresión racional.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 12 de abril de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100